Rolf Walter

Einführung in die lineare Algebra

Rolf Walter

Einführung in die lineare Algebra

Mit 42 Bildern und 100 Beispielen

V

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig / Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Walter, Rolf:
Einführung in die lineare Algebra / Rolf Walter. –
Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1982.

ISBN 978-3-663-00006-8 ISBN 978-3-663-00155-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-00155-3

Satz: Vieweg, Braunschweig

Buchbinderische Verarbeitung: W. Langelüddecke, Braunschweig

Vorwort

Dieses Buch beruht auf Vorlesungen über lineare Algebra und analytische Geometrie, die ich jeweils in zweisemestrigen Kursen an den Universitäten Freiburg und Dortmund für Mathematiker, Physiker, Informatiker und Statistiker gehalten habe. Der Umfang entspricht ungefähr dem Inhalt des ersten Semesters. Mit dem vorliegenden Text soll aber nicht nur das formale Fundament für den zweiten Teil gelegt werden, vielmehr erscheint es mir vernünftig, eine Einführung in das gesamte Gebiet zu geben und dabei gleich wesentliche Probleme der linearen Algebra anzupacken. Deshalb ist dieses Buch nicht nur für Mathematikstudenten des Diploms und des Lehramtes geeignet, sondern ebenso für Nichtmathematiker, die ihre Ausbildung in linearer Algebra in einem Semester absolvieren müssen und trotzdem einen etwas größeren Einblick erhalten sollen. Auch zum Selbststudium dürfte sich der Band gut benützen lassen.

Wie soll man Mathematik lernen? Dafür gibt es kein Patentrezept, aber eines kann man sagen: Mathematik lernt man am besten kennen, indem man sie betreibt; das Betreiben aber ist eng mit dem Interesse verbunden. Ich habe deswegen immer versucht, den Leser zur eigenen, teilnehmenden Beschäftigung mit der Mathematik anzuregen, einerseits durch die Vorführung vieler Beispiele, andererseits durch einen Aufbau der Theorie, der von einfachen, konkreten Fragen ausgeht und möglichst direkt zu zentralen Themen gelangt.

Gestartet wird hier mit dem expliziten Lösen linearer Gleichungssysteme, das ohnehin in der Praxis ständig gebraucht wird. Am Ende des Weges steht die Jordansche Normalform, also die Feinstruktur der linearen Selbstabbildungen. Was an Etappen dazwischen liegt, lehrt ein Blick in das Inhaltsverzeichnis. Übrigens vollziehe ich den entscheidenden Schritt bei der Jordanschen Normalform, nämlich die Zerlegung bei nilpotenten Operatoren, mit einem sehr durchsichtigen, vom Üblichen abweichenden Verfahren, das zu jedem zyklischen Unterraum maximaler Dimension alle invarianten Komplemente erzeugt, und zwar so, daß seine praktische Durchführung auf ein lineares Gleichungssystem führt.

Ein Wort zu den Vorkenntnissen: Die Studenten treten heute mit einer sehr unterschiedlichen Vorbildung in ihr Studium ein. Um hier ein wenig auszugleichen, habe ich dem systematischen Aufbau ein Orientierungskapitel vorangestellt, in dem einige elementare Gesichtspunkte beschrieben und die abstrakten Begriffsbildungen behutsam vorbereitet werden. Daneben enthalten das erste Viertel des Textes und der Anhang weiteren Stoff, der nicht im engeren Sinne zur linearen Algebra, wohl aber zur mathematischen Allgemeinbildung gehört. Dadurch sind beim Leser nur geringe Vorkenntnisse erforderlich.

Die lineare Algebra spielt eine fundamentale Rolle in breiten Bereichen der Mathematik und der Anwendungen, und sie hat deswegen auch eine große Bedeutung zum Verständnis parallel laufender Vorlesungen, vor allem für die Analysis. Ich habe mich bemüht, möglichst früh die Hilfsmittel, welche in der Infinitesimalrechnung benötigt werden, bereitzustellen. Insbesondere sind die unendlich dimensionalen Vektorräume einbezogen, soweit dafür kein Extraaufwand erforderlich ist.

Von der Methode her betrachtet, ist natürlich dem axiomatischen Zugang und der basisfreien Denkweise der Vorzug einzuräumen. Daneben werden hier die kalkülmäßigen und konstruktiven Methoden des endlich dimensionalen Falles einschließlich der Matrizenrechnung ausführlich behandelt. Beide Standpunkte haben ihre Berechtigung und sollten in gegenseitiger Befruchtung gepflegt werden.

In diesem Band steht die lineare Algebra im Vordergrund des Interesses, die Anfänge der analytischen Geometrie und ihr anschaulicher Hintergrund werden mitentwickelt. Die Geometrie hat hier den Zweck, die algebraischen Begriffe zu motivieren und zu illustrieren, und sie dient so einer erwünschten Erweiterung des Gesichtsfeldes. Die höheren Teile der linearen Algebra, die multilineare Algebra und der eigentliche Aufbau der analytischen Geometrie, wie sie etwa dem zweiten Semester der genannten Vorlesung entsprechen, sollen in einem weiteren Band folgen.

Danken möchte ich auch an dieser Stelle Frl. G. Wienke für ihren unermüdlichen Einsatz bei der Textherstellung, den Herren Dr. M. Armsen, Dr. N. Kleinjohann und Dr. W. Strübing für Hilfe und wertvolle Ratschläge bei der Korrektur und nicht zuletzt Frau Dr. P. Danzer-Katzarova für ihre Unterstützung bei den Bildern. Mein Dank gilt aber auch dem Verlag, vor allem Frau Schmickler-Hirzebruch, für die gute Betreuung des Werkes.

Dortmund, im September 1980 Rolf Walter

Zum Gebrauch des Buches

Der Leser, der mit dem Orientierungskapitel beginnt, lernt dort einige handfeste Dinge, ohne einen komplizierten Apparat aufnehmen zu müssen. Beim weiteren Vorgehen wird schrittweise die Sprache der Mengenlehre herangezogen. Die elementaren mengentheoretischen Begriffe, die hierzu nötig sind, findet man im Anhang zusammengestellt. Es sei dem Leser empfohlen, diesen Anhang wie eine Grammatik zu benützen, d.h. ohne Hemmungen im Haupttext voranzuschreiten und nur bei Bedarf hinten nachzuschlagen. Leser mit entsprechenden Grundkenntnissen können sich bei der Orientierung auf Abschnitt 0.1 beschränken oder gleich bei Kapitel 1 oder 2 einsteigen.

Die sieben Kapitel sind in Abschnitte mit zwei- oder dreistelligen Nummern gegliedert. In jedem Abschnitt fängt die Numerierung von Definitionen, Formeln usw. neu an, wobei Sätze und Definitionen gemeinsam mit großen lateinischen Buchstaben durchgezählt sind. Lediglich die Numerierung der Bilder ist im ganzen Buch durchlaufend. Verweise erfolgen im gleichen Abschnitt ohne dessen Nennung, an anderen Stellen unter Anfügung des zitierten Abschnitts in eckigen Klammern; z.B. verweist „Satz E [5.1]“ auf Satz E des Abschnitts 5.1. Bei einem „Zusatz“ werden stets die Voraussetzungen beibehalten. Das Ende einer Überlegung wird durch das Zeichen □ angedeutet, die Zeichen := und =: signalisieren eine Definitionsgleichung, wobei der Doppelpunkt auf der Seite der neu eingeführten Größe steht.

Die Standardmengen der Mathematik sind folgendermaßen bezeichnet:

- $\mathbf{N}$ Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0)
- $\mathbf{Z}$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbf{Q}$ Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbf{R}$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbf{C}$ Menge der komplexen Zahlen.

Das Anhängen des Indexes „0“ bedeutet hier Hinzunahme, die Schreibart „$\setminus 0$“ Wegnahme der Null; z.B. ist $\mathbf{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit 0, $\mathbf{Z} \setminus 0$ die Menge $\mathbf{Z}$ ohne 0. Die Marken „+“ und „–“ bezeichnen entsprechende Vorzeicheneinschränkungen; z.B. ist $\mathbf{R}^+$ die Menge aller positiven, $\mathbf{R}_0^+$ die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.

Am Ende des Buches finden sich Verzeichnisse der Literatur und der weiteren Symbole. Hinweise auf das Literaturverzeichnis erfolgen durch Nennung der Autoren in Kursivschrift (gegebenenfalls mit einer Ordnungsnummer). Das Sachverzeichnis enthält auch die Lebensdaten der im Text erwähnten Wissenschaftler.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung X

0 Orientierung 1

0.1 Das Lösen linearer Gleichungssysteme, Gaußsches Verfahren 1
0.2 Standardveranschaulichung 16
0.3 Metrische Standardgrößen 26

1 Einige Grundstrukturen der Algebra 37

1.1 Der Gruppenbegriff 37
1.2 Der Körperbegriff 45
1.3 Der Körper der komplexen Zahlen 48
1.4 Polynome 59
1.5 Einige weitere algebraische Strukturen 64

2 Vektorräume 65

2.1 Der Vektorraumbegriff 65
2.2 Lineare Abhängigkeit 68
2.3 Dimension und Basis 75
2.4 Untervektorräume 78
2.5 Erzeugung endlich dimensionaler Untervektorräume, Matrizen 86
2.6 Affine Struktur eines Vektorraumes 94

3 Lineare Abbildungen 98

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften 98
3.2 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme 106
3.3 Operationen für lineare Abbildungen 112
3.4 Koordinaten- und Matrizenrechnung 116
3.5 Basis- und Koordinatentransformation 128
3.6 Darstellung von Unterräumen 133

4 Determinanten 141

4.1 Motivierung 141
4.2 Determinantenformen 142
4.3 Zahldeterminanten 153
4.4 Anwendungen 159
4.5 Determinanten von linearen Abbildungen und von Bilinearformen 163
4.6 Orientierung reeller Vektorräume 169

5 Reelle Räume mit Skalarprodukt 171

5.1 Skalarprodukte 171
5.2 Der endlich dimensionale Fall 177
5.3 Euklidische Vektorräume 187
5.4 Orthogonalsysteme 191
5.5 Determinantenformen in euklidischen Vektorräumen 200
5.6 Zwei- und dreidimensionale euklidische Vektorräume 207
5.7 Isometrien 210

6 Eigenwerte und Jordansche Normalform 219

6.1 Eigenelemente 219
6.2 Die charakteristische Gleichung 221
6.3 Der euklidische Fall 227
6.4 Verallgemeinerte Eigenräume und erster Zerlegungssatz 231
6.5 Nilpotente Operatoren und zweiter Zerlegungssatz 238
6.6 Konstruktion der Jordanschen Normalform 243
6.7 Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform 245
6.8 Durchrechnung eines Beispiels 249

Anhang über Logik und Mengelehre 253

Logisches Schließen 253
Mengen 254
Abbildungen 256
Relationen 258
Natürliche Zahlen und vollständige Induktion 259

Literaturhinweise 261

Wichtige Symbole aus Kapitel 0 bis 6 263

Sachverzeichnis 269

Einleitung

Das *Ziel* ist das Lösen „linearer" Probleme und die Einsicht in ihre Struktur. „Lineare" Fragen treten in vielen Bereichen in unterschiedlichem Gewande auf, haben aber denselben Kern. Um diesen Kern geht es hier. Typische Beispiele aus der Mathematik sind: lineare Gleichungssysteme, lineare Operationen in der Geometrie, lineare Differential- und Integralgleichungen. Was „linear" ist, wird sich im Laufe der Diskussion herausschälen; bei Gleichungssystemen bedeutet es, daß die Unbekannten in erster Potenz auftreten. Lineare Probleme sind häufig Vereinfachungen allgemeinerer Fragestellungen, deren Lösung sie vorbereiten oder erleichtern.

Wie in vielen Bereichen der Mathematik ist auch hier die *Methode* die der *Axiomatik*, d.h. es werden für die zu behandelnden Objekte Grundregeln, *Axiome*, aufgestellt und aus diesen auf rein logischem Wege Folgerungen gezogen. Dieses Vorgehen erlaubt dem Mathematiker den Aufbau einer Theorie, ohne daß er ständig neu „einleuchtende" oder „anschauliche" Tatsachen heranziehen muß. Da die Grundregeln auf mannigfache Weise abgewandelt werden können, führt die axiomatische Denkweise zu einer Vielfalt von Theorien, die auch für den außermathematischen Bereich ein Angebot darstellt. Die axiomatische Methode gliedert den Stoff, sie erleichtert die Übersicht über die verschiedenen Strukturen, und sie führt nicht selten zu neuen, grundlegenden Einsichten.

Es gibt allerdings kein Axiomatisieren „im luftleeren Raum". In den meisten Fällen stützt sich das axiomatische Vorgehen auf einen breiten inner- oder außermathematischen Erfahrungsschatz, und es erfordert ein großes Maß an Umsicht bei der Durchführung. Vor der Axiomatik des Vektorraumes beschäftigen wir uns daher mit einigen konkreten Aspekten, die zu dieser Abstraktion geführt haben.

0 Orientierung

0.1 Das Lösen linearer Gleichungssysteme, Gaußsches Verfahren

Ein zentrales Problem in der Mathematik ist das Lösen von Gleichungen. Hier geht es speziell um *lineare Gleichungssysteme*. Die Rechenregeln für reelle Zahlen werden im Augenblick als bekannt vorausgesetzt. Sie werden aufgrund der Körpereigenschaften in der Analysisvorlesung entwickelt; systematisch gehen wir etwas später hierauf ein. Wenn im vorliegenden Abschnitt 0.1 von Zahlen die Rede ist, kann sich der Leser darunter immer reelle Zahlen vorstellen, obwohl die bewiesenen Sätze allgemeiner für Elemente eines kommutativen Körpers gültig bleiben. Zunächst orientieren wir uns an einigen Beispielen.

0.1.1 Beispiele

Beispiel 1. Das „System“ besteht hier nur aus einer Gleichung mit einer Unbekannten:

(1) $\qquad 3x = 6.$

Das erste Problem ist die *Existenzfrage*: *Gibt* es eine Lösung? Die Antwort kann durch Raten gefunden werden: $x = 2$.

Das nächste Problem ist die *Eindeutigkeitsfrage*: Gibt es *nur eine* Lösung?

Eine *erste Art*, dieses zu behandeln, verläuft so: Angenommen, es gibt zwei Lösungen x und $\bar{x}$:

$$3x = 6, \quad 3\bar{x} = 6.$$

Dann folgt hieraus schrittweise:

$$\begin{aligned} 3x - 3\bar{x} &= 6 - 6 \\ 3\cdot(x - \bar{x}) &= 0 \\ x - \bar{x} &= 0 \\ x &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen stimmen überein; man sagt, die Lösung ist *eindeutig bestimmt.*

Eine *zweite Art*, die Eindeutigkeit anzugehen, entspricht der geläufigen Art, Gleichungen zu lösen: Man zieht solange Folgerungen aus der Gleichung, bis sich die Unbekannte selbst ergibt; dabei wird die Existenz *vorausgesetzt.* Hier läuft dies so: Aus $3x = 6$ folgt durch Multiplikation mit $\frac{1}{3}$ zunächst $\frac{1}{3}\cdot 3x = \frac{1}{3}\cdot 6$, also $x = 2$. Damit ist gezeigt: Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, dann ist diese zwangsläufig $x = 2$. *Warnung*: Dies ist ein reiner

Eindeutigkeitsbeweis! Allerdings ergibt sich die Existenz bei diesem Vorgehen leicht durch die *Probe*: $3 \cdot 2 = 6$.

Das gesamte *Resultat* wird so ausgesprochen: Die Gleichung (1) besitzt *eine* und *nur eine* Lösung, nämlich $x = 2$. □

Das Wort „*ein*" wird in der Mathematik meistens im Sinne von „*mindestens ein*" gebraucht. Im eben formulierten Resultat weist „eine" auf die Existenz, „nur eine" auf die Eindeutigkeit hin. Statt „ein und nur ein" sagt man häufig „*genau ein*".

Analoge Fragen der Existenz und Eindeutigkeit treten in vielen Bereichen auf, z.B. bei Differentialgleichungen, Fixpunkten von Abbildungen usw..

Beispiel 2. Das System sei

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 1; \end{aligned} \tag{2}$$

es enthält zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y. Die *Eindeutigkeit* ergibt sich wie bei dem Vorgehen der zweiten Art in Beispiel 1 durch Ziehen von Folgerungen: Addition der beiden Gleichungen liefert $3x = 6$, also $x = 2$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $2 + y = 5$, also $y = 3$. Die *Existenz* ergibt sich aus der *Probe*:

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 5 \\ 2 \cdot 2 - 3 &= 1. \end{aligned}$$

Als *Resultat* folgt hier: Das System (2) besitzt *genau eine* Lösung, nämlich das *Paar* $(x, y) = (2, 3)$.

Beispiel 3. Das System sei

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 0; \end{aligned} \tag{3}$$

es enthält zwei Gleichungen mit drei Unbekannten x, y, z. Angenommen, es gibt Zahlen x, y, z, die (3) erfüllen. Dann folgt durch Addition der beiden Gleichungen $0 = 1$. Da dies unmöglich ist, hat das System (3) *keine* Lösung; es enthält einen Widerspruch.

Beispiel 4. Das System sei

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -x + y - z &= -1; \end{aligned} \tag{4}$$

es ist vom gleichen Typ wie (3), verhält sich aber völlig anders: Da die zweite Gleichung durch Multiplikation mit -1 aus der ersten hervorgeht, ist sie erfüllt (nicht erfüllt), wenn die erste erfüllt (nicht erfüllt) ist. Daher ist (4) gleichwertig mit der einen Gleichung

$$x - y + z = 1. \tag{4'}$$

Diese ist lediglich eine *Bindung* zwischen x, y, z. Man kann etwa $x = \lambda$ und $y = \mu$ als beliebige Zahlen wählen und erhält dann z eindeutig als

$$z = 1 - x + y = 1 - \lambda + \mu.$$

Resultat: Das System (4′) [genauso (4)] besitzt *mehrere* Lösungen, nämlich die *Tripel* der Form

$$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda + \mu),$$

mit beliebigen Zahlen λ, μ. Man nennt dies eine *Parameterdarstellung* der Lösungsmenge (mit den *Parametern* λ, μ), und man spricht auch von der *allgemeinen Lösung*. Im Gegensatz hierzu ist eine *partikuläre Lösung* einfach eine feste Lösung, z.B. die mit $\lambda = 1$, $\mu = -2$, also $(x, y, z) = (1, -2, -2)$. □

Zu den obigen Grundproblemen der Existenz und Eindeutigkeit kommt also, falls letztere nicht erfüllt ist, hinzu die Frage nach der *Vielfalt der Lösungen*, d.h. die Bestimmung der *Lösungsmenge* und ihrer günstigen Darstellung.

Beispiel 5. Daß man beim Operieren mit Gleichungssystemen vorsichtig sein muß, zeigt das System:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ -x + y - z &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir ziehen hieraus Folgerungen, indem wir *erstens* die erste Gleichung beibehalten, *zweitens* alle drei Gleichungen addieren, *drittens* die zweite und dritte Gleichung addieren:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \tag{5'}$$

Aufgrund der Konstruktion ist jedes Tripel (x, y, z), das (5) löst, auch Lösung von (5′). Das Umgekehrte gilt aber nicht! So löst etwa das Tripel (x, y, z) mit $x = y = z = \frac{1}{3}$ zwar (5′), nicht aber (5). Durch Ziehen von Folgerungen können also Lösungen hinzukommen!

0.1.2 Zusammenfassung

(a) Eine Lösung eines Gleichungssystems mit n Unbekannten ist nicht eine einzige Zahl, sondern ein geordnetes System von n Zahlen.

(b) Ein lineares Gleichungssystem kann keine, genau eine oder mehrere Lösungen besitzen.

(c) Die Umformungen zur Lösung sollten so beschaffen sein, daß sie die Menge der Lösungen nicht verändern.

0.1.3 Einige Grundbegriffe

Ein **lineares Gleichungssystem** mit p **Gleichungen** und n **Unbekannten** $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form:

$$(G)=(1)\quad \boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n &= b_p. \end{aligned}}$$

Hierbei sind a_{ij}, b_i gegebene Zahlen. Die a_{ij} heißen die **Koeffizienten**, der erste **Index** (hier i) bezeichnet die Nummer der **Zeile** (= waagrechte Reihe), der zweite (hier j) die Nummer der **Spalte** (= senkrechte Reihe). Die b_i heißen die **rechten Seiten**. Für die ganzen Zahlen i, j, p, n gilt $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq n$.

Das lineare Gleichungssystem (G) heißt **homogen**, wenn alle $b_i = 0$ sind.

Ein **n-Tupel** von Zahlen ist ein geordnetes System $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ von Zahlen. Wir schreiben

(2) $\quad u := (u_1, u_2, \ldots, u_n).$

Hierin heißt u_i die i-te **Koordinate** von u. Zwei n-Tupel u und

(3) $\quad v := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

sind **gleich**, geschrieben $u = v$, wenn sie **koordinatenweise** übereinstimmen, d.h. wenn gilt

(4) $\quad u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n,$

sonst **ungleich**, geschrieben $u \neq v$.

Beispiel 1. Für $n = 3$ ist $(0, 1, 0) \neq (1, 0, 0)$. □

Ist ein lineares Gleichungssystem (G) gegeben, so heißen die n-Tupel, die es erfüllen, **Lösungen**; die Gesamtheit der Lösungen ist die **Lösungsmenge**.

Ein *homogenes* System besitzt stets eine Lösung, nämlich das sog. **Null-n-Tupel**

(5) $\quad 0 := (0, 0, \ldots, 0).$

Dieses heißt die **triviale** Lösung.

0.1.4 Elementare Umformungen

Ein Grundprinzip beim Lösen von Gleichungssystemen besteht darin, schrittweise möglichst viele Unbekannte „hinauszuwerfen“, zu *eliminieren.* Tut man dies unvorsichtig, so kann sich allerdings die Lösungsmenge verändern. Daher sollten nur solche Umformungen zur Elimination verwendet werden, die die Lösungsmenge nicht beeinflussen. Bei linearen Gleichungssystemen wird diese Forderung durch jede der folgenden **elementaren Umformungen** erfüllt:

(I) *Vertauschen zweier Gleichungen.*

(II) *Multiplikation einer der Gleichungen mit einer Zahl* $\neq 0$.

(III) *Addition einer mit einer beliebigen Zahl multiplizierten Gleichung zu einer anderen Gleichung.*

Dabei werden die nicht betroffenen Gleichungen des Systems beibehalten.

Satz A. *Bei jeder elementaren Umformung ändert sich die Lösungsmenge nicht.*

Beweis. Wir führen den Beweis für die elementare Umformung (III), wobei wir annehmen können, daß die Umformung sich auf die ersten beiden Gleichungen bezieht. [Der Leser kann nach dem gleichen Muster auch die Fälle (I) und (II) behandeln, bei denen die Behauptung sowieso fast selbstverständlich ist.] Lautet das Ausgangssystem (G) wie in 0.1.3, so lautet das umgeformte System so:

$$
(\tilde{G}) \quad
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
(a_{21} + \gamma a_{11})\,x_1 & + (a_{22} + \gamma a_{12})\,x_2 + \dots & + (a_{2n} + \gamma a_{1n})\,x_n & = & b_2 + \gamma b_1 \\
 & & & \vdots & \\
a_{p1}x_1 & + a_{p2}x_2 + \dots\dots\dots & + a_{pn}x_n & = & b_p.
\end{array}
$$

Die erste Gleichung von (G) wurde also mit der Zahl γ multipliziert und zur zweiten addiert, selbst aber unverändert übernommen. Von der dritten Gleichung an stimmen (G) und $(\tilde{G})$ überein.

Aufgrund dieser Konstruktion ist klar, daß jede Lösung von (G) auch Lösung von $(\tilde{G})$ ist. Umgekehrt bleibt zu zeigen, daß jede Lösung von $(\tilde{G})$ auch Lösung von (G) ist. Das folgt aber daraus, daß die durchgeführte Umformung *rückgängig* gemacht werden kann, nämlich dadurch, daß in $(\tilde{G})$ die erste Gleichung mit $-\gamma$ multipliziert und zur zweiten addiert, selbst aber beibehalten wird. □

Bemerkung 1. Das Wesentliche in diesem Beweis ist, daß das Erfülltsein des Systems (G) *gleichwertig* ist mit dem Erfülltsein des Systems $(\tilde{G})$. Dazu waren zwei Schritte nötig: Aus (G) folgt $(\tilde{G})$, nämlich durch den Schluß „Addition der mit γ multiplizierten ersten Gleichung von (G) zur zweiten“; aus $(\tilde{G})$ folgt (G), nämlich durch den Schluß „Addition der mit $-\gamma$ multiplizierten ersten Gleichung von $(\tilde{G})$ zur zweiten“. □

Zwei Gleichungssysteme mit denselben Unbekannten heißen **äquivalent**, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen. Die Gleichungssysteme können dabei durchaus verschieden aussehen. Der oben bewiesene Satz A besagt, daß elementare Umformungen ein lineares Gleichungssystem in ein dazu äquivalentes überführen.

0.1.5 Das Gaußsche Verfahren

Die elementaren Umformungen können zur *systematischen Lösung* von linearen Gleichungssystemen herangezogen werden. Hierbei versucht man in einem ersten Schritt, eine der Unbekannten aus allen Gleichungen bis auf eine zu eliminieren. In diesen Gleichungen kommen dann weniger als n Unbekannte vor, so daß eine weitere Elimination versucht werden kann, usw.. Zum Schluß erscheint ein Gleichungssystem in *gestaffelter Form*, das rekursiv gelöst werden kann. Da es die gleiche Lösungsmenge besitzt wie das Ausgangssystem, ist somit auch dieses gelöst. Wir erläutern dieses Vorgehen an folgendem

Beispiel 1. Das Ausgangssystem sei

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
(1) & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 7.
\end{array}
$$

Wir behalten die erste Gleichung bei und formen die zweite nach (III) [0.1.4] um, indem wir zu ihr das (− 2)-fache der ersten Gleichung addieren. Auch die dritte Gleichung wird beibehalten:

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
(2) & & & 2x_2 & + & x_3 & = & -5 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 7.
\end{array}
$$

Nun werden die ersten beiden Gleichungen beibehalten und zur dritten das (− 3)-fache der ersten addiert:

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
(3) & & & 2x_2 & + & x_3 & = & -5 \\
 & & & -4x_2 & + & x_3 & = & 1.
\end{array}
$$

Hierdurch ist x_1 aus den letzten beiden Gleichungen eliminiert worden, und das Verfahren kann mit diesen Gleichungen fortgesetzt werden. Der Übergang von (1) zu (3) kann in einem Schritt vollzogen werden. Dies ist in dem folgenden Schema durchgeführt, bei dem auch gleich x_2 aus der letzten Gleichung eliminiert wird. Die rechts angeschriebenen Symbole deuten die verwendeten elementaren Umformungen der Art (III) an.

$$
\begin{array}{rrcrcrcl|l}
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 & -2 \quad -3 \\
(1) & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 & \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 7 & \\
\hline
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\
(3) & & & 2x_2 & + & x_3 & = & -5 & 2 \\
 & & & -4x_2 & + & x_3 & = & 1 & \\
\hline
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\
(4) & & & 2x_2 & + & x_3 & = & -5 & \\
 & & & & & 3x_3 & = & -9 & \\
\hline
\end{array}
$$

Das Endsystem (4) hat dieselbe Lösungsgesamtheit wie (1), und da es gestaffelte Form hat, kann es – *von der letzten Gleichung ausgehend und nach oben fortschreitend – rekursiv* gelöst werden:

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{x_3 = -3,} \\
(5) & 2x_2 = -5 - x_3 = -5 + 3 = -2, \ \underline{x_2 = -1,} \\
 & \underline{x_1} = 2 - x_2 - x_3 = 2 + 1 + 3 \underline{= 6.}
\end{array}
$$

□

Es kann vorkommen, daß bei Elimination einer Unbekannten gleichzeitig weitere Unbekannte eliminiert werden. Die Stufen werden dann größer. Dies zeigt das folgende

Beispiel 2. Es sei a eine feste Zahl. Schrittweise Ausführung der rechts angegebenen Umformungen liefert aus dem Ausgangssystem (6):

$$
\begin{array}{l|rcl|l}
 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 & 1 \quad -2 \quad -1 \\
(6) & -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 &=& -1 & \\
 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &=& 2 & \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 &=& a & \\
\hline
 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 & \\
(7) & - x_3 - 2x_4 + 3x_5 &=& -1 & -1 \quad -2 \\
 & - x_3 + x_4 - 3x_5 &=& 2 & \\
 & -2x_3 - x_4 &=& a & \\
\hline
 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 & \\
(8) & - x_3 - 2x_4 + 3x_5 &=& -1 & \\
 & 3x_4 - 6x_5 &=& 3 & -1 \\
 & 3x_4 - 6x_5 &=& a+2 & \\
\hline
 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 & \\
(9) & - x_3 - 2x_4 + 3x_5 &=& -1 & \\
 & 3x_4 - 6x_5 &=& 3 & \\
 & 0 &=& a-1 & \\
\hline
\end{array}
$$

Wieder ist (9) mit (6) äquivalent, so daß es genügt, (9) zu lösen. Ist $a \neq 1$ (z. B. $a = 2$), so hat (9) keine Lösung; denn es erscheint ja ein Widerspruch. Ist $a = 1$, so ist die letzte Gleichung von (9) stets erfüllt, und das System der ersten drei Gleichungen von (9) kann rekursiv gelöst werden. Allerdings ist die Situation etwas verschieden vom Beispiel 1, da die rekursive Lösung nicht eindeutig ist. Hierauf kommen wir gleich zurück. □

Nach diesem Beispiel ist als allgemeinste **gestaffelte Form** (oder **Stufenform**) die folgende zu erwarten:

$$
(S) = (10) \qquad
\begin{array}{rcl}
c_{1,r_1} x_{r_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{1n} x_n &=& d_1 \\
c_{2,r_2} x_{r_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{2n} x_n &=& d_2 \\
 &\vdots& \\
c_{k,r_k} x_{r_k} + \ldots + c_{kn} x_n &=& d_k \\
0 &=& d_{k+1} \\
 &\vdots& \\
0 &=& d_p .
\end{array}
$$

Wir zeigen, daß *jedes* lineare Gleichungssystem auf diese Gestalt gebracht werden kann:

Satz A (Gaußsches Verfahren). *Jedes lineare Gleichungssystem* (G) [0.1.3] *läßt sich durch elementare Umformungen der Art* (I), (III) [0.1.4] *in ein gestaffeltes System der Form* (S) *überführen. Dabei ist*

$$1 \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leqq n, \quad 0 \leqq k \leqq p, \tag{11}$$

$$c_{1,r_1} \neq 0,\ c_{2,r_2} \neq 0, \ldots, c_{k,r_k} \neq 0. \tag{12}$$

Beweis. Das Verfahren ist schon an den obigen Beispielen deutlich geworden; es muß nur noch allgemein beschrieben werden: Sind alle Koeffizienten a_{ij} von (G) Null, so hat das System schon die Form (S), wobei $k = 0$, $d_1 = b_1, \ldots, d_p = b_p$ ist. Gibt es wenigstens einen Koeffizienten, der nicht Null ist, so gibt es (von links kommend) eine erste Spalte, in der ein von Null verschiedener Koeffizient vorkommt. Diese Spalte habe die Nummer r_1. Durch Vertauschen von Gleichungen, also durch Umformung des Typs (I), kann dann die folgende Gestalt mit $a'_{1,r_1} \neq 0$ erreicht werden:

$$-\frac{a'_{2,r_1}}{a'_{1,r_1}} \quad \cdots \quad -\frac{a'_{p,r_1}}{a'_{1,r_1}}$$

$$\begin{aligned} a'_{1,r_1}x_{r_1} + \ldots\ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{2,r_1}x_{r_1} + \ldots\ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\ \vdots \\ a'_{p,r_1}x_{r_1} + \ldots\ldots + a'_{pn}x_n &= b'_p \end{aligned} \tag{13}$$

Nun eliminiert man x_{r_1} aus den letzten $p-1$ Gleichungen mit Hilfe der rechts angedeuteten elementaren Umformungen des Typs (III):

$$\begin{aligned} a'_{1,r_1}x_{r_1} + a'_{1,r_1+1}x_{r_1+1} + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a''_{2,r_1+1}x_{r_1+1} + \ldots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\ &\ \vdots \\ a''_{p,r_1+1}x_{r_1+1} + \ldots + a''_{pn}x_n &= b''_p. \end{aligned} \tag{14}$$

In den letzten $p-1$ Gleichungen kommen zumindest $x_1, x_2, \ldots, x_{r_1}$ nicht mehr vor; auf sie kann erneut dasselbe Verfahren angewendet werden.

Nach endlich vielen Schritten ergibt sich die Form (S). □

Die in (12) genannten Zahlen heißen die **Leitkoeffizienten** von (S).

Unmittelbar klar ist der folgende

Zusatz zu A. *Durch elementare Umformungen der Art* (II) [0.1.4] *kann außerdem erreicht werden, daß die Leitkoeffizienten* $c_{1,r_1}, \ldots, c_{k,r_k}$ *von* (S) *alle gleich* 1 *sind.* □

0.1.6 Rekursive Auflösung

Hat man die gestaffelte Form (S) [0.1.5] hergestellt, so erhebt sich die Frage, ob und gegebenenfalls wie diese gelöst werden kann.

Ist in (S) eine der Zahlen $d_{k+1}, \ldots, d_p$ von Null verschieden, so ist das System (S) nicht lösbar; denn es enthält einen Widerspruch.

Gilt in (S) dagegen $d_{k+1} = \ldots = d_p = 0$, so soll nun gezeigt werden, wie (S) lösbar ist. Dies geschieht durch rekursive Auflösung der k ersten Gleichungen von (S) nach $x_{r_k}, x_{r_{k-1}}, \ldots, x_{r_1}$, und zwar von unten nach oben fortschreitend. Man hat dabei in jedem Schritt im wesentlichen die folgende Situation zu betrachten: Es ist ein Gleichungssystem der Form

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad (2)\left\{\begin{array}{r} a_{2,s+1}x_{s+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,s+1}x_{s+1} + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{array}\right. \end{array}\right.$$

mit $s \geqq 1$ gegeben, und es sind alle Lösungen des Teilsystems (2) in den Unbekannten $x_{s+1}, \ldots, x_n$ schon bekannt. Gesucht sind alle Lösungen von (1). Hierzu wird man die erste Gleichung nach x_1 auflösen, in sie für $x_{s+1}, \ldots, x_n$ die Lösungen von (2) einsetzen und für $x_2, \ldots, x_s$ beliebige Zahlen wählen dürfen:

Lemma A (rekursive Auflösung). *Durchläuft* $(x'_{s+1}, \ldots, x'_n)$ *die Lösungen von* (2), *und durchlaufen* $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *unabhängig voneinander beliebige Zahlen, so durchläuft* $(x_1, \ldots, x_n)$ *mit*

$$(3)\quad \begin{array}{rl} x_1 & := b_1 - a_{12}\lambda_2 - \ldots - a_{1s}\lambda_s - a_{1,s+1}x'_{s+1} - \ldots - a_{1n}x'_n \\ x_2 & := \lambda_2 \\ & \vdots \\ x_s & := \lambda_s \\ x_{s+1} & := x'_{s+1} \\ & \vdots \\ x_n & := x'_n \end{array}$$

alle Lösungen von (1).

Beweis. Es ist zweierlei zu zeigen:

(i) Ist $(x'_{s+1}, \ldots, x'_n)$ eine Lösung von (2) und sind $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ irgendwelche Zahlen, so ist $(x_1, \ldots, x_n)$ mit (3) Lösung von (1).

(ii) Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung von (1), so existiert eine Lösung $(x'_{s+1}, \ldots, x'_n)$ von (2) sowie Zahlen $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$, so daß (3) gilt.

Beide Behauptungen sind aber unmittelbar klar, wenn man bedenkt, daß die erste Gleichung von (3) in der Form

$$(4)\quad x_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1s}\lambda_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

geschrieben werden kann. □

Durch mehrfache Anwendung von Lemma A auf die gestaffelte Form (S) folgt:

Satz B. *Das gestaffelte System* (S) [0.1.5] *besitzt genau dann eine Lösung, wenn* $d_{k+1} = \dots = d_p = 0$ *gilt. Die Lösungen* $(x_1, \dots, x_n)$ *von* (S) *ergeben sich rekursiv gemäß Lemma* A. *Dabei durchlaufen alle* x_i *außer* $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}$ *unabhängig voneinander beliebige Zahlen.* □

Beispiel 1. Auf diese Weise soll das Endsystem (9) in Beispiel 2 [0.1.5] für $a = 1$ gelöst werden. Beim ersten Schritt ist $x_5 = \lambda$ zu setzen, die vorletzte Gleichung ergibt dann $3x_4 = 3 + 6\lambda$, also $x_4 = 1 + 2\lambda$. Die zweite Gleichung von (9) liefert:

(5) $$x_3 = 1 - 2x_4 + 3x_5 = 1 - 2(1 + 2\lambda) + 3\lambda = -1 - \lambda,$$

beim Übergang zur ersten ist x_2 willkürlich zu wählen, etwa $x_2 = 2\mu$, dann folgt:

(6) $$\begin{aligned} 2x_1 &= x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2\mu + 1 + \lambda + 1 + 2\lambda - \lambda = 2 + 2\lambda + 2\mu, \\ x_1 &= 1 + \lambda + \mu. \end{aligned}$$

Die Lösungen von (9) und damit von (6) in Beispiel 2 [0.1.5] sind also die 5-Tupel

(7) $$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + \lambda + \mu, 2\mu, -1 - \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda),$$

wobei λ, μ beliebige Zahlen sind.

0.1.7 Das Gaußsche Verfahren in der Praxis

Für die Praxis wird zur Herstellung der gestaffelten Form eine Abkürzung des Gaußschen Verfahrens verwendet. Hierbei schreibt man nur noch die Koeffizienten a_{ij} und die rechten Seiten b_i auf. Außerdem werden für jeden folgenden Schritt nur noch die Gleichungen übernommen, die eine Umformung erfahren, während jede Gleichung, die sich nicht mehr verändert, bei ihrem letztmaligen Auftreten durch eine Einrahmung kenntlich gemacht wird. Das Endsystem besteht dann gerade aus den eingerahmten Gleichungen.

Beispiel 1. Das hiernach entstehende Schema sieht für das System (6) in Beispiel 2 [0.1.5] so aus

(1) $$\begin{array}{rrrrr|r|l}
2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \quad 1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline
-2 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & \leftarrow \\
4 & -2 & 1 & -1 & -1 & 2 & \leftarrow \\
2 & -1 & -1 & -2 & 1 & a & \leftarrow \\ \hline
 & & -1 & -2 & 3 & -1 & \quad -1 \quad -2 \\
 & & -1 & 1 & -3 & 2 & \leftarrow \\
 & & -2 & -1 & 0 & a & \leftarrow \\ \hline
 & & & 3 & -6 & 3 & \quad -1 \\
 & & & 3 & -6 & a+2 & \leftarrow \\ \hline
 & & & & 0 & a-1 &
\end{array}$$

Die eingerahmten Gleichungen sind die des Systems (9) in 0.1.5! □