Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

946

Nicolas Spaltenstein

Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1982

Auteur
N. Spaltenstein
Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zentrum
8092 Zürich, Switzerland

AMS Subject Classifications (1980): 14 L XX, 20-02, 20 G XX

ISBN 3-540-11585-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-11585-4 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

A ma mère

Introduction

L'objet principal de ces notes est l'étude de la variété $\mathcal{B}_x^G$ des points fixes d'un élément x d'un groupe algébrique affine G sur la variété $\mathcal{B}^G$ des sous-groupes de Borel de G , en particulier dans le cas où x est unipotent et G réductif.

Cette variété a été l'objet de divers travaux. Mentionnons en particulier ceux de Steinberg [42], [43], Vargas [45] et Cross (thèse, Durham), dont les méthodes sont semblables à celles utilisées ici. Presque tous se bornent à considérer le cas où G est connexe; en fait ces techniques s'adaptent souvent au cas où G n'est pas connexe, pour autant qu'on utilise les bonnes formulations, et on a essayé de travailler dans cette situation. En particulier, les groupes réductifs ne sont pas supposés forcément connexes. Comme groupes réductifs non connexes apparaissant naturellement, on trouve O_{2n} (où intervient la symétrie d'ordre 2 du graphe D_n) et le groupe des colinéations et corrélations d'un espace projectif (où intervient la symétrie d'ordre 2 du graphe A_n) . D'autres groupes proviennent de la symétrie d'ordre 3 du graphe D_4 et de la symétrie d'ordre 2 du graphe E_6 . On a ainsi deux familles et deux cas exceptionnels. Quand la caractéristique du corps de base est égale à l'ordre de la symétrie, on obtient de nouvelles classes unipotentes. Avec ces classes unipotentes et celles des groupes simples connexes, on a essentiellement toutes les classes unipotentes des groupes réductifs (en supposant résolus certains problèmes concernant le groupe fini G/G^o) .

Une première partie - "Notations et rappels" - a pour but de fixer les notations et de formuler certaines définitions et quelques résultats sous une forme appropriée à l'usage qui en est fait. En particulier, le groupe de Weyl est défini comme étant l'ensemble des G^o-orbites dans $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$ muni de la structure du groupe convenable (voir par exemple [19]).

Le chapitre I est consacré à l'étude des classes unipotentes des groupes réductifs. Au paragraphe 1 on montre en particulier comment se ramener aux cas cités plus haut. Le paragraphe 2 est consacré à un exposé des résultats concernant la classification des éléments unipotents, en particulier pour les groupes classiques. Au paragraphe 3 on traite le cas de la symétrie d'ordre 3 du graphe D_4 par des calculs explicites utilisant les formules de commutation. La même méthode pourrait être utilisée pour la symétrie d'ordre 2 du graphe E_6 . Les calculs seraient cependant beaucoup plus longs et sensiblement plus longs que ceux faits en (II.10.14). On se contente de montrer au paragraphe 4 qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes unipotentes provenant de cette symétrie du graphe E_6 . La démonstration est due à G. Lusztig. C'est une adaptation de la démonstration pour les groupes réductifs connexes de la finitude du nombre de classes unipotentes. On en déduit que le même résultat est vrai pour les groupes réductifs non connexes. Ce paragraphe fait appel à des techniques et des résultats qui dépassent de loin ce qui est utilisé dans le reste de l'ouvrage.

La finitude du nombre de classes unipotentes se révèle extrêmement utile par la suite. Les lecteurs que cette démonstration rebuterait peuvent, soit accepter ce résultat, soit rajouter aux endroits appropriés une hypothèse de finitude et se contenter de savoir qu'elle est vraie dans certains cas importants (groupes classiques d'après les travaux de Wall [46], groupes réductifs connexes en bonne caractéristique d'après Richardson [25], etc.).

Le chapitre II est consacré à l'étude de $\mathcal{B}_x^G$ et à quelques applications. La plupart du temps, on considère une composante unipotente fixe uG^o de G. Les résultats les plus complets sont obtenus pour les groupes classiques et, surtout, pour GL_n. Au paragraphe 9 on étudie certaines relations d'équivalence sur les groupes de Weyl. Ces relations d'équivalence s'apparentent à celle qui intervient dans l'étude du spectre primitif des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples complexes. On a en fait la même relation pour le type A_n, mais pour B_n ces relations d'équivalence ne sont pas comparables.

Au chapitre III on suppose, pour simplifier, que G est un groupe réductif connexe. L'ensemble X des classes unipotentes de G possède un ordre naturel. Lorsque $G = GL_n$, X possède aussi une involution décroissante. On regarde dans quelle mesure un résultat similaire existe dans le cas général. On étudie aussi la dépendance de X par rapport à la caractéristique, et on met en correspondance les éléments de X avec certaines classes unipotentes de certains sous-groupes d'un groupe dual G^* de G. Tout le chapitre est basé sur l'utilisation systématique de la structure d'ordre de X. Malheureusement, les résultats sont obtenus par des considérations cas par cas et en utilisant la classification des éléments unipotents. Les résultats de ce chapitre peuvent donc plutôt être vus comme une partie de ce que devrait recouvrir une théorie générale des classes unipotentes.

Deux aspects de l'étude des classes unipotentes ont été laissés de côté. Le premier est la théorie de Springer [37] qui met en relation les classes unipotentes de G et les représentations complexes irréductibles du groupe de Weyl de G. Certaines opérations sur les classes unipotentes se traduisent facilement en termes de représentations (voir, par exemple, [22]), ce qui aurait pu permettre de simplifier certains énoncés du chapitre III, mais ce n'est pas toujours le cas, surtout pour les opérations qui dépendent de la caractéristique du corps de base. De plus, la théorie de Springer a pour l'instant certaines limitations en mauvaise caractéristique.

L'autre aspect est l'étude des nappes dans G, c'est-à-dire des sous-variétés irréductibles de G formées de classes d'une même dimension, et maximales pour cette propriété. Cet aspect est lié à l'induction pour les classes unipotentes.

Beaucoup des résultats obtenus s'appliquent aussi aux éléments nilpotents des algèbres de Lie des groupes réductifs. La difficulté principale provient, dans ce cas, du fait qu'on ne dispose pas actuellement d'un théorème de finitude pour le nombre d'orbites nilpotentes sans hypothèse sur la caractéristique.

Certains résultats bien connus sont redémontrés dans ce travail. On en a profité pour adopter les énoncés qui conviennent le mieux à l'usage qu'on veut en faire et pour expliciter certains résultats annexes. C'est le cas, par exemple, pour les résultats du paragraphe 1 du chapitre II concernant les centralisateurs d'éléments quasi-semi-simples des groupes réductifs. Cela permet aussi de limiter le nombre de références. En plus de la théorie classique des groupes algébriques affines sur un corps algébriquement clos telle qu'elle est exposée dans les livres de Borel [2] et Humphreys [16] , les principaux résultats supposés connus sont ainsi ceux ayant trait à la finitude du nombre de classes unipotentes et à la détermination de ces dernières, et le résultat de Steinberg selon lequel $\mathcal{B}_x^G$ n'est jamais vide [41].

Durant la réalisation de ce travail j'ai beaucoup bénéficié de l'aide directe ou indirecte de nombreux mathématiciens. Parmi eux je tiens à remercier tout particulièrement George Lusztig qui m'a parlé le premier de ces problèmes et qui m'a stimulé et guidé, et aussi R.W. Carter, R.W. Richardson, T.A. Springer et J. Tits. Ce travail a été commencé à l'Université de Warwick, poursuivi à l'IHES, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et à l'Université de Lausanne; j'ai bénéficié à divers moments du soutien matériel du Fonds national suisse de la recherche scientifique et de la Royal Society. Je désire enfin exprimer ma gratitude à Madame Suzanne Assal qui s'est chargée de la frappe du manuscrit.

Lausanne, août 1980

TABLE DES MATIERES

Notations et rappels.

0.1. Toutes les variétés algébriques considérées ici sont définies sur un corps algébriquement clos k . On note en général p la caractéristique de k .

0.2. On ne considère que des groupes algébriques <u>linéaires</u>.

0.3. Si G est un groupe algébrique, on note $\mathcal{B}^G$ la variété des sous-groupes de Borel de G . Le groupe G agit par conjugaison sur $\mathcal{B}^G$. Nous étudions ici la variété $\mathcal{B}_x^G = \{B' \in \mathcal{B}^G \mid {}^xB' = B'\}$, où $x \in G$. Cette variété n'est jamais vide [41,p.49] et $C_G(x)$ agit sur $\mathcal{B}_x^G$. On note $S^G(x)$, ou $S(x)$ quand aucune confusion n'est à craindre, l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{B}_x^G$. On écrit aussi $(X_\sigma)_{\sigma \in S(x)}$ pour ces composantes. Le groupe $A(x) = C_G(x)/C_G(x)^0$ agit sur $S(x)$. Soit aussi $A_0(x) = C_{G^0}(x)/C_G(x)^0 \subset A(x)$.

Si G' est un sous-groupe fermé de G normalisé par x , on définit de même $\mathcal{B}_x^{G'}$.

Dans ce qui suit, G est toujours un groupe algébrique.

0.4. Si H est un sous-groupe de G et $x \in G$, on note $c\ell_H(x) = \{hxh^{-1} \mid h \in H\}$ la H-classe de conjugaison de x . Si X est une sous-variété de G , on note $\mathcal{U}(X)$ la variété des éléments unipotents de G contenus dans X . Si X est H-stable, on note $\mathcal{C}\ell_H(X)$ l'ensemble des H-classes de conjugaison d'éléments de X et on écrit $\mathcal{CU}_H(X)$ pour $\mathcal{C}\ell_H(\mathcal{U}(X))$. Quand aucune confusion n'est à craindre on écrit aussi $c\ell(x)$ pour $c\ell_G(x)$, $c\ell^0(x)$ pour $c\ell_{G^0}(x)$, $\mathcal{C}\ell(X)$ pour $\mathcal{C}\ell_G(X)$, $\mathcal{C}\ell^0(X)$ pour $\mathcal{C}\ell_{G^0}(X)$, $\mathcal{CU}(X)$ pour $\mathcal{CU}_G(X)$ et $\mathcal{CU}^0(X)$ pour $\mathcal{CU}_{G^0}(X)$.

0.5. On note R_G le radical de G et U_G le radical unipotent de G.

0.6. Dans ce travail, u est un élément unipotent d'un groupe algébrique. En particulier, si $s \in G$ et si $x=su$ est la décomposition de Jordan de x, alors u est la partie unipotente de x et s la partie semi-simple.

0.7. On choisit une fois pour toutes un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T de B. On écrit U pour U_B et N pour $N_G(B)$, sauf mention expresse du contraire. On note B^- l'unique sous-groupe de Borel de G tel que $B \cap B^- = TU_G$, et on pose $U^- = U_{B^-}$.

0.8. Si X est un ensemble, on note $|X|$ le cardinal de X, et si H est un groupe qui agit sur X on note X/H l'ensemble des orbites pour cette action.

0.9. On note W_G, ou W si aucune confusion n'est possible, le groupe de Weyl de G. On le définit de la manière suivante. Comme ensemble, $W = (\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G)/G^o$, où l'on considère l'action diagonale. On écrira souvent w pour une telle orbite considérée comme un élément du groupe fini W, et $O(w)$ pour la même orbite considérée comme variété. Si $w \in W$, la longueur de w est $\ell(w) = \dim O(w) - \dim \mathcal{B}^G$.

Soit $\Pi = \{w \in W \mid \ell(w)=1\}$. La loi de composition dans W est définie par :

a) $s^2 = 1$ si $s \in \Pi$

b) si $w, w', w'' \in W$ et $O(w) = O(w'') \bullet O(w')$, alors $w=w'w''$ (par définition, $O(w'') \bullet O(w') = \{(B_0,B_2) \in \mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G \mid$ il existe $B_1 \in \mathcal{B}^G$ tel que $(B_0,B_1) \in O(w')$ et $(B_1,B_2) \in O(w'')\}$).

Cela fait de (W,Π) un système de Coxeter. Si $O(w'') \bullet O(w') = O(w)$, alors $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'')$. Pour tout $w \in W$, $\ell(w) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid \exists\ s_1,\ldots,s_j \in \Pi$ tels que $w = s_1\ldots s_j\}$.

Si $I \subset \Pi$, on note W_I le sous-groupe de W engendré par I .

Il existe dans W un unique élément de longueur maximale. On le note w_G .

0.10. L'action diagonale de G sur $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$ induit une action $(g,w) \mapsto g\cdot w$ de G (ou G/G^o) sur W , et Π est stable pour cette action. Si $w \in W$, on note $\bar{w}$ l'orbite de w et $\bar{W} = \{\bar{w} \mid w \in W\}$. Pour tout $x \in G$, $w \mapsto x\cdot w$ est un automorphisme de W .

0.11. Nous considérons maintenant l'action de u sur W (c'est-à-dire l'action du groupe cyclique engendré par u). On note $o(s)$ l'orbite de $s \in \Pi$ pour cette action. Soit s^* l'unique élément de longueur maximale dans $W_{o(s)}$. Le groupe $W^u = \{w \in W \mid u\cdot w = w\}$ est engendré par $\Pi_u = \{s^* \mid s \in \Pi\}$, et (W^u, Π_u) est un système de Coxeter. Si $w \in W^u$, soit $\ell_u(w) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid$ il existe $s_1,\ldots,s_j \in \Pi$ tels que $w = s_1^*\ldots s_j^*\}$. Si $w = s_1^*\ldots s_j^*$, alors $\ell_u(w) = j$ si et seulement si $\ell(w) = \ell(s_1^*)+\ldots+\ell(s_j^*)$.

Si $u \in G^o$, alors $W^u = W$ et $\ell_u(w) = \ell(w)$ pour tout $w \in W$.

0.12. Si $w, w' \in W$ et $\ell(ww') = \ell(w)+\ell(w')$, alors $O(ww')$ est le produit fibré de $O(w)$ et $O(w')$ pour les morphismes $pr_2 : O(w) \to \mathcal{B}^G$ et $pr_1 : O(w') \to \mathcal{B}^G$. En particulier, si $(B_o, B_2) \in O(ww')$, il existe un unique $B_1 \in \mathcal{B}^G$ tel que $(B_o, B_1) \in O(w)$ et $(B_1, B_2) \in O(w')$. Cela définit un morphisme surjectif $O(ww') \to \mathcal{B}^G$, $(B_o, B_2) \mapsto B_1$. Si $w = s_1^*\ldots s_j^*$ et $\ell_u(w) = j$ $(s_1,\ldots,s_j \in \Pi)$, alors pour tout couple $(B_o, B_j) \in O(w)$ il existe une famille $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant j-1}$ d'éléments de $\mathcal{B}^G$ telle que $(B_{i-1}, B_i) \in O(s_i^*)$ pour $1 \leqslant i \leqslant j$, et cette famille est unique.

0.13. Soit X une sous-variété irréductible de $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$. On lui associe l'unique élément $w = \varphi^G(X)$ de W tel que $\overline{X \cap O(w)} = \overline{X}$. Si $x \in G$ et $\sigma, \tau \in S(x)$, on pose $\varphi^G(\sigma,\tau) = \varphi^G(X_\sigma \times X_\tau)$. On obtient ainsi une application φ^G de $S(x) \times S(x)$ dans W . On écrit aussi φ au lieu de φ^G si aucune confusion n'est possible. On note $\overline{\varphi}(\sigma,\tau)$ l'orbite de $\varphi(\sigma,\tau)$ pour l'action de G/G^0 sur W , et $\overline{\varphi}$ l'application correspondante $S(x) \times S(x) \to \overline{W}$.

0.14. Supposons que G soit réductif. Alors W peut être identifié à $N_{G^0}(T)/T$. Si $n \in N_{G^0}(T)$, nT correspond à la G^0-orbite de $(B, {}^nB)$ dans $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$, et on écrit ${}^wB$ pour ${}^nB$ si cette orbite est $O(w)$. De cette manière W correspond à un sous-groupe normal de $N_G(T)/T$ et l'action de G/G^0 sur W correspond à l'action par conjugaison de $N_N(T)$ sur $N_{G^0}(T)/T$.

On note $\Delta_0(G)$ le graphe de Dynkin de G^0 et on prend les éléments de Π comme sommets de $\Delta_0(G)$. Le groupe G/G^0 agit sur $\Delta_0(G)$. On note $\Delta(G)$ le triple $(\Delta_0(G), G/G^0, \gamma_G)$ constitué de $\Delta_0(G)$, du groupe fini G/G^0 et de l'homomorphisme naturel $\gamma_G : G/G^0 \to \Gamma(G)$, où $\Gamma(G)$ est le groupe des automorphismes de $\Delta_0(G)$.

Soit Φ_G le système de racines de G^0 (par rapport à T) et soit X_λ le sous-groupe unipotent de dimension 1 correspondant à $\lambda \in \Phi_G$. Pour tout $\lambda \in \Phi_G$ on choisit un isomorphisme $x_\lambda : \mathbb{G}_a \to X_\lambda$, où $\mathbb{G}_a$ est le groupe additif de k considéré comme groupe algébrique. On note Φ_G^+ l'ensemble des racines positives (par rapport à B) et Π' la base correspondante.

On peut aussi considérer W comme un groupe d'automorphisme de Φ_G . De manière plus générale, $N_G(T)/T$ agit sur Φ_G , et $N_N(T)/T$ agit sur Π' . A tout $\lambda \in \Phi_G$ correspond une réflection s_λ que nous considérons comme un élément de W. Alors $\alpha \mapsto s_\alpha$ donne une bijection $\Pi' \to \Pi$, et on pose $o(\alpha) = \{\beta \in \Pi' | s_\beta \in o(s_\alpha)\}$. On dit que $-1 \in W$ si l'automorphisme $\lambda \mapsto -\lambda$ de Φ_G peut être réalisé par un élément de W.

Soit H un sous-groupe connexe distingué de G^o. Il existe alors un sous-groupe connexe distingué K de G^o tel que G^o soit le produit presque direct de H et K, et $\mathcal{B}^G \cong \mathcal{B}^H \times \mathcal{B}^K$. Cela permet d'identifier W_H à un sous-groupe normal de W. Si $H \supset T$, l'identification de W_H et $N_H(T)/T$ est compatible avec les inclusions $W_H \subset W$ et $N_H(T)/T \subset N_{G^o}(T)/T$.

Si $\Pi' = \{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$ (avec $N = |\Pi'|$), on dit que la caractéristique p est bonne si $p = 0$ ou si $p \notin \{n_{\lambda,i} | \lambda \in \Phi_G, \; 1 \leq i \leq N\}$, où les entiers $n_{\lambda,i}$ sont définis par la formule $\lambda = \sum_{1 \leq i \leq N} n_{\lambda,i}\alpha_i$, et la hauteur de λ est $h(\lambda) = \sum_{1 \leq i \leq n} n_{\lambda,i}$. On dit que la caractéristique p est assez grande si $p \geq 4h(\lambda)+3$ pour tout $\lambda \in \Phi_G$.

Quand il n'y a pas de risque de confusion, on écrit aussi Φ au lieu de Φ_G, et Φ^+ au lieu de Φ_G^+.

0.15. Supposons que G soit réductif et soit $x \in N_N(T)$. On a alors une action de x sur Φ. Soit $\Phi/\langle x\rangle$ l'ensemble des orbites pour cette action. Alors $W^x = \{w \in W | x.w = w\}$ agit sur $\Phi/\langle x\rangle$.

Il existe un système de racines Φ_x et une surjection $\pi_x : \Phi \to \Phi_x$ qui ont les propriétés suivantes :

a) les fibres de π_x sont les x-orbites dans Φ ;

b) $\pi_x(\Pi')$ est une base de Φ_x ;

c) si λ,μ et $\lambda+\mu$ sont des éléments de Φ, alors $\pi_x(\lambda) + \pi_x(\mu)$ $= \pi_x(\lambda+\mu)$ et $\pi_x(-\lambda) = -\pi_x(\lambda)$;

d) π_x induit un isomorphisme de W^x sur le groupe de Weyl W_x de Φ_x. De plus, si $\alpha \in \Pi'$, soit s_α^* l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de W engendré par la x-orbite de s_α et soit $s_{\pi_x(\alpha)} \in W_x$ la réflection correspondant à la racine $\pi_x(\alpha) \in \Phi_x$. Alors s_α^* et $s_{\pi_x(\alpha)}$ se correspondent par π_x.

0.16. Si $P,Q,\ldots$ sont des sous-groupes paraboliques de G, on note $\mathcal{P},\mathcal{Q},\ldots$ les classes de conjugaison de $P,Q,\ldots$ respectivement, et $\mathcal{P}^o,\mathcal{Q}^o,\ldots$ les G^o-classes de conjugaison de $P,Q,\ldots$ respectivement. La G^o-classe de conjugaison $\mathcal{P}^o$ contient un unique sous-groupe qui contient B. L'inclusion $\mathcal{B}^P \times \mathcal{B}^P \subset \mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$ induit un homomorphisme $W_P \to W$ qui est injectif et qui permet de considérer W_P comme un sous-groupe de W. On associe à P le sous-ensemble $W_P \cap \Pi$ de Π. Cela donne une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G^o contenant B sur l'ensemble des parties de Π. Si $W_P \cap \Pi = I$, alors $W_P = W_I$. Si $J \subset \Pi$, on note $\mathcal{P}_J$ (resp. $\mathcal{P}_J^o$) la classe (resp. la G^o-classe) de conjugaison du normalisateur d'un sous-groupe parabolique de G^o correspondant à J.

Supposons que G soit réductif. Si $P \supset B$ est un sous-groupe parabolique de G, on associe aussi à P le sous-ensemble $\{\alpha \in \Pi' \mid X_{-\alpha} \subset P\}$ de Π'. Soit aussi L l'unique sous-groupe de Levi de P^o contenant T. Alors $N_L(T)/T = N_{P^o}(T)/T \subset N_{G^o}(T)/T$. On obtient ainsi, à identification près, le sous-ensemble $W_P \cap \Pi$ de Π et l'inclusion $W_P \subset W$.

Supposons toujours G réductif et soit P un sous-groupe parabolique quelconque de G. Soit M un sous-groupe de Levi de P^o et soit $L = N_P(M)$. Alors $L^o = M = L \cap P^o$, L rencontre toutes les composantes de P et P est le produit semi-direct de L par U_P. On dit qu'un tel sous-groupe est un sous-groupe de Levi de P.

0.17. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de variétés algébriques. Alors : a) si toutes les fibres de f sont irréductibles et ont la même dimension et si f est un morphisme ouvert ou fermé, alors l'image réciproque par f de toute sous-variété irréductible de Y est irréductible.

b) Supposons que G agisse sur X et Y, transitivement sur Y, et que f soit G-équivariant. Alors si toutes les composantes irréductibles de X ont la même dimension et si Y' est une sous-variété de Y dont toutes les composantes irréductibles ont la même dimension, toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(Y')$ ont la même dimension.

* * *

CHAPITRE I

CLASSES UNIPOTENTES

1. Résultats généraux sur les classes unipotentes.

1.1. On note $rg(G)$ le rang de G, c'est-à-dire la dimension d'un tore maximal de G. Pour tout $x \in G$, définissons $rg_x(G) = \max\{rg(C_G(g)) \mid g \in xG^o\}$. On a $rg_x(G) = rg_y(G)$ si $y \in xG^o$, et $rg_x(G) = rg(G)$ si $x \in G^o$.

On dit qu'un élément de G est <u>quasi-semi-simple</u> s'il normalise un sous-groupe de Borel de G et un tore maximal de ce sous-groupe. Si $g \in G$ normalise B, alors T et ${}^gT$ sont des tores maximaux de B, et il existe donc $b \in B$ tel que ${}^{bg}T = T$. Ainsi $bg \in gB$ est quasi-semi-simple. En particulier, si $B' \in \mathcal{B}^G$, toute composante de $N_G(B')$ contient des éléments quasi-semi-simples dans G. Comme $C_B(T) = N_B(T)$, on a $C_T(x) = C_T(y)$ si x et $y \in xG^o$ normalisent B et T.

1.2. LEMME. *Supposons que* $x \in G$ *normalise* B *et* T, *et soit* $y \in xG^o$.

Alors :

a) $\dim C_T(x) \geq rg(C_G(y))$.

b) $C_T(x)$ *est un tore maximal de* $C_G(x)$.

c) $rg_y(G)$ <u>est le rang commun des centralisateurs des éléments quasi-semi-simples contenus dans</u> yG^o .

d) $rg_y(G) = rg_{yU_G}(G/U_G)$.

e) <u>Si</u> $B' \in \mathcal{B}_y^G$ <u>et</u> $N' = N_G(B')$, <u>alors</u> $rg_y(G) = rg_y(N') = \dim C_{N'/U_{B'}}(yU_{B'})$.

Soit S un tore maximal de $C_G(y)$ et soit $B' \supset S$ un point fixe de S sur $\mathcal{B}_y^G$. Soit $T' \supset S$ un tore maximal de B' et soit $x' \in yB'$ un élément tel que ${}^{x'}T' = T'$. Comme les actions de y et x' sur $B'/U_{B'} \cong T'$ coïncident, $S \subset C_{T'}(x')$. Comme $\dim C_{T'}(x') = \dim C_T(x)$, on a $\dim S \leqslant \dim C_T(x)$. Cela démontre (a) . Les autres assertions découlent de (a) .

1.3. <u>Remarque</u> : nous montrerons plus loin que si $x = su$ est la décomposition de Jordan d'un élément quelconque $x \in G$, alors $rg_x(G) = rg_u(C_G(s))$ (II.1.14).

1.4. LEMME. <u>Soit</u> Z <u>un sous-groupe fermé distingué de</u> G <u>contenu dans un tore maximal et soient</u> $u \in G$ <u>et</u> $z \in Z$ <u>des éléments tels que</u> u <u>et</u> uz <u>soient unipotents. Alors</u> u <u>et</u> uz <u>sont conjugués sous l'action de</u> Z .

Remarquons que Z est central dans G^o . Soit q l'ordre de uG^o dans G/G^o . C'est une puissance de p . Nous aurons besoin des endomorphismes suivants de Z , $f : x \mapsto u\,x\,u^{-1}$, $\Phi : x \mapsto \prod_{o \leqslant i \leqslant q-1} f^i(x)$,
$\Psi : x \mapsto xf(x)^{-1}$. Comme $u^q \in G^o$, f^q est l'identité et par conséquent $\Phi \circ f = f \circ \Phi = \Phi$, $\Phi^2(x) = \Phi(x)^q$ et $\Phi \circ \Psi(x) = (\Phi \circ \Psi)(x) = 1$ pour tout $x \in Z$.

Comme les éléments de Z sont semi-simples, $x \mapsto x^q$ est un endomorphisme bijectif de Z . De $\Phi^2(x) = \Phi(x)^q$, on déduit donc que $\operatorname{Ker} \Phi \cap \operatorname{Im} \Phi = \{1\}$, ce qui implique que l'homomorphisme canonique $\operatorname{Ker} \Phi \times \operatorname{Im} \Phi \to Z$ est bijectif.

De $(\Phi\circ\Psi)(x) = (\Psi\circ\Phi)(x) = 1$, on déduit que $\mathrm{Im}\,\Psi \subset \mathrm{Ker}\,\Phi$ et $\mathrm{Im}\,\Phi \subset \mathrm{Ker}\,\Psi$. Mais tout $x \in Z$ est de la forme $x = y^q$ pour un unique $y \in Z$. Par conséquent, si $\Psi(x) = 1$, on a aussi $\Psi(y)^q = 1$, donc $\Psi(y) = 1$, c'est-à-dire $f(y) = y$, et alors $\Phi(y) = \prod_{0\leq i\leq q-1} f^i(y) = y^q = x$. On a donc $\mathrm{Ker}\,\Psi = \mathrm{Im}\,\Phi$. Mais $\mathrm{Ker}\,\Psi \cap \mathrm{Im}\,\Psi \subset \mathrm{Im}\,\Phi \cap \mathrm{Ker}\,\Phi = \{1\}$. Cela montre que l'homomorphisme canonique $\mathrm{Ker}\,\Psi \times \mathrm{Im}\,\Phi \to Z$ est aussi bijectif. On en déduit que $\mathrm{Im}\,\Psi = \mathrm{Ker}\,\Phi$.

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme.

Les éléments u^q et $(uz)^q$ de G^o sont unipotents. Mais $(uz)^q = (uzu^{-1})(u^2zu^{-2})\ldots(u^qzu^{-q})u^q = \Phi(z)u^q$. Comme $\Phi(z)$ est semi-simple et central dans G^o, u^q et $(uz)^q$ ne peuvent être tous deux unipotents que si $\Phi(z) = 1$, c'est-à-dire s'il existe $x \in Z$ tel que $\Psi(x) = z$. On a alors $f(x)uf(x)^{-1} = uxf(x)^{-1} = uz$.

1.5. COROLLAIRE. a) <u>L'homomorphisme canonique</u> $G \to G/Z$ <u>induit une bijection</u> $\mathcal{CU}(G) \to \mathcal{CU}(G/Z)$.

b) <u>L'homomorphisme canonique</u> $C_G(u) \to C_{G/Z}(uZ)$ <u>est surjectif</u>.

a) Vu (1.4), il suffit de constater que le morphisme $\mathcal{U}(G)\to\mathcal{U}(G/Z)$ est surjectif, ce qui est vrai puisque si $xZ \in \mathcal{U}(G/Z)$ et si u est la partie unipotente de x, alors $uZ = xZ$.

b) Si $gZ \in C_{G/Z}(uZ)$, on a $g^{-1}ug \in uZ$. Comme u et $g^{-1}ug$ sont unipotents, il existe $z \in Z$ tel que $zuz^{-1} = g^{-1}ug$. Alors $gz \in C_G(u)$ et $gzZ = gZ$.

1.6. COROLLAIRE. <u>Soit</u> uG^o <u>une composante unipotente de</u> G . <u>Alors</u> $\mathcal{U}(uG^o)$ <u>est une sous-variété fermée irréductible de</u> G <u>et</u> $\operatorname{codim}_G \mathcal{U}(uG^o) = \operatorname{rg}_u(G)$.

Il est clair que $\mathcal{U}(uG^o)$ est une sous-variété fermée de G . Il faut montrer qu'elle est irréductible et que $\operatorname{codim}_G \mathcal{U}(uG^o) = \operatorname{rg}_u(G)$. Si G^o est un tore, il suffit d'utiliser (1.4) avec $Z = G^o$: on a $\mathcal{U}(uG^o) = c\ell^o(u)$ et $\operatorname{codim}_G \mathcal{U}(uG^o) = \dim C_G(u) = \operatorname{rg}_u(G)$. Comme un élément de G est unipotent si et seulement si son image dans G/U_G l'est, (1.2.d) et (0.17) montrent que le corollaire est vrai aussi dans le cas où G^o est résoluble.

Dans le cas général, on peut supposer que $B \in \mathcal{B}_u^G$. Alors $\mathcal{U}(uG^o)$ est l'image de $f : (\mathcal{U}(uB) \times G^o) \to \mathcal{U}(uG^o)$, $(v,g) \mapsto gvg^{-1}$, et donc $\mathcal{U}(uG^o)$ est irréductible. De plus $\dim(\mathcal{U}(uB) \times G^o) = \dim G^o + \dim B - \operatorname{rg}_u(G)$ puisque le corollaire est vrai pour $N = N_G(B)$ et $\operatorname{rg}_u(G) = \operatorname{rg}_u(N)$. Toutes les fibres de f ont une dimension $\geqslant \dim B$, et il suffit de prouver qu'il existe un élément unipotent $v \in uG^o$ tel que $\mathcal{B}_v^G$ soit un ensemble fini. Nous montrerons plus tard qu'un tel élément existe (II.1.8). L'assertion concernant la dimension de $\mathcal{U}(uG^o)$ dans le cas général ne sera pas utilisée d'ici là.

1.7. Soit H un groupe réductif tel que H^o soit adjoint et tel que $\gamma_H : H/H^o \to \Gamma(H)$ soit un isomorphisme. On peut considérer H comme le groupe $\operatorname{Aut}(H^o)$ des automorphismes de H^o . Ecrivons Δ, Γ pour $\Delta_o(H)$, $\Gamma(H)$ respectivement, et identifions H/H^o et Γ au moyen de γ_H . Si F est un groupe fini et $\gamma : F \to \Gamma$ est un homomorphisme, le produit fibré $K = F \times_\Gamma H = \{(f,h) \mid \gamma(f) = \gamma_H(hH^o)\}$ est un sous-groupe fermé de $F \times H$ qui contient H^o . C'est donc un groupe réductif et par construction K/K^o s'identifie à F et γ_K à γ . On a donc $\Delta(K) = (\Delta, F, \gamma)$.

Supposons maintenant que G soit un groupe réductif. Prenons pour H le groupe des automorphismes du groupe adjoint de G^o. Appliquons la construction précédente avec $F = G/G^o$ et $\gamma = \gamma_G$ (on identifie ici $\Delta_o(G)$ et $\Delta_o(H)$). Notons G^* le produit fibré $F \times_\Gamma H$. Remarquons que G^* ne dépend, à isomorphisme près, que de $\Delta(G)$ et qu'on a un homomorphisme naturel $f_G : G \to G^*$ qui permet d'identifier $\Delta(G)$ et $\Delta(G^*)$.

On dira que G^* est le <u>groupe adjoint</u> de G et que G est adjoint si f_G est un isomorphisme.

1.8. THEOREME. <u>Si</u> G <u>est un groupe réductif, les classes unipotentes de</u> G <u>ne dépendent que de</u> $\Delta(G)$. <u>De manière plus précise, si</u> G^* <u>et</u> $f_G : G \to G^*$ <u>sont comme ci-dessus, alors</u> f_G <u>induit une bijection naturelle</u> $\mathcal{CU}(G) \to \mathcal{CU}(G^*)$.

Soit Z le centre de G^o. A la factorisation $G \to G/Z \to G^*$ de f_G correspond une factorisation $\mathcal{CU}(G) \to \mathcal{CU}(G/Z) \to \mathcal{CU}(G^*)$. Il suffit donc d'utiliser (1.5) et le fait que $G/Z \to G^*$ est bijectif.

1.9. <u>Remarque</u> : l'homomorphisme $f_G : G \to G^*$ induit aussi une bijection naturelle (G/G^o)-équivariante $\mathcal{CU}^o(G) \to \mathcal{CU}^o(G^*)$, si G est réductif. C'est cette formulation que nous utiliserons par la suite.

1.10. Si G est réductif, on peut procéder comme suit pour déterminer les classes unipotentes de G. On commence par chercher les classes unipotentes dans G/G^o et le centralisateur d'un élément de chacune de ces classes. On supposera que ceci a déjà été fait. Si uG^o est une composante unipotente et si $H \supset G^o$ est le sous-groupe de G tel que $H/G^o = C_{G/G^o}(uG^o)$, les classes unipotentes de G qui rencontrent uG^o correspondent bijectivement aux classes unipotentes de H contenues dans uG^o. On se ramène ainsi au cas où uG^o est dans le centre de G/G^o.